UN e-SEA
UNIVERSITÉ NUMÉRIQUE DES SCIENCES DE LA MER

MGC
Master Génie Civil
U.F.R. SCIENCES ET TECHNIQUES
UNIVERSITÉ DE NANTES

M2 GC TP2M
Méthodes de réalisation des ouvrages maritimes

Module A : Les ouvrages de protection

Séance A-1 : La similitude dynamique avec des applications au génie côtier

Mis à jour le
23/03/2018

Auteur : **Martin SANCHEZ**,
Maître de Conférences HDR en Génie Civil,
Chargé de cours en Hydraulique Maritime, Aménagement Portuaire,
Méthodes de Réalisation des Ouvrages Maritimes, Travaux Maritimes,
Actions Marines sur les Structures, Dynamique Sédimentaire,
Mécanique des Fluides.

www.univ-nantes.fr

UNIVERSITÉ DE NANTES

Table des matières

Présentation

Cette séance qui concerne l'analyse dimensionnelle et la similitude dynamique avec des applications aux problèmes de génie côtier, comporte les quatre parties suivantes :

- Partie 1 : Lecture de ce document à l'exception de la dernière section sur les applications de la similitude dynamique (25% en temps)
- Partie 2 : Réponse en ligne au test d'auto-évaluation sur l'analyse dimensionnelle (15% en temps)
- Partie 3 : Etude des 6 problèmes contenus dans ce document (50% en temps)
- Partie 4 : Réponse au questionnaire en ligne relatif aux problèmes contenus dans ce document (10% en temps)

Le temps de travail préconisé pour chaque partie est donné en pourcentage par rapport au temps total consacré à cette séance.

Pour cette séance le travail en groupe de 2 ou 3 apprenants est encouragé pour faciliter une entraide et un partage des connaissances et compétences préalablement acquises. Cependant, un apprenant isolé peut parfaitement traiter l'ensemble des problèmes proposés.

Les objectifs de cette séance

À la fin de la séance, l'apprenant sera capable de :

- Vérifier, grâce à l'analyse dimensionnelle, l'homogénéité d'une équation de la mécanique.
- Comprendre et utiliser les nombreuses formules pratiques des ingénieurs qui sont expliquées par la théorie de similitude dynamique.
- Appliquer la théorie de similitude dynamique à l'étude des principaux problèmes de génie côtier.

Introduction

Les problèmes de génie civil en relation avec la mécanique des fluides sont souvent difficiles à résoudre par des méthodes analytiques ou numériques, alors même que dans un grand nombre des cas, les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- Le fluide est newotonien et incompressible,
- Les vitesses d'écoulement sont faibles par rapport à la célérité du son,
- Les effets liés à la tension superficielle sont négligeables.

Dans ces cas, l'écoulement est régi dans le domaine fluide par des équations bien connues, dont la solution dépend des valeurs initiales et de frontière des inconnues du problème. Bien que le problème soit en général bien défini par l'existence d'un même nombre d'équations et d'inconnues, à l'heure actuelle la seule solution envisageable est souvent de type expérimental.

La similitude dynamique est une théorie rigoureuse, permettant d'extrapoler les observations expérimentales de laboratoire vers les applications aux problèmes pratiques de terrain.

La similitude dynamique est à la base des études en modèle hydraulique. Cette théorie fait appel à des paramètres adimensionnels pour définir les conditions de similitude dynamique entre un prototype et son modèle.

Dimensions et unités des grandeurs physiques

Dimensions fondamentales

Les trois dimensions fondamentales considérées dans ce document sont présentées dans le tableau suivant :

Dimension	**Notation de la dimension**	**Unités SI**
Longueur	*L*	*m*
Temps	*t*	*s*
Masse	*M*	*kg*

Dimensions de quelques grandeurs physiques

Les dimensions des principales grandeurs physiques entrant en jeu dans les problèmes de génie côtier sont rassemblées dans le tableau suivant :

Grandeur	***Notation***	***Dimension***	***Unités SI***
Déplacement	Δl	L	m
Vitesse	V	$L\,T^{-1}$	$m\,s^{-1}$
Accélération	dV/dt	$L\,T^{-2}$	$m\,s^{-2}$
Force	F	$M\,L\,T^{-2}$	$kg\,m\,s^{-2} = N$
Pression	p	$M\,L^{-1}\,T^{-2}$	$kg\,m^{-1}\,s^{-2} = N\,m^{-2} = Pa$
Energie	E	$M\,L^{2}\,T^{-2}$	$kg\,m^{2}\,s^{-2} = N\,m = J$
Puissance	$\mathcal{P}$	$M\,L^{2}\,T^{-3}$	$kg\,m^{2}\,s^{-3} = J\,s^{-1} = W$

Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est un outil indispensable de la théorie de similitude dynamique. Cette analyse contribue à :

- la définition des paramètres adimensionnels d'importance d'un problème,
- la vérification de l'homogénéité d'une équation,
- la détermination de la dimension d'une grandeur.

On dit que deux grandeurs physiques sont homogènes, si elles ont la même dimension. On utilise la notation $[G]$ pour indiquer que l'on s'intéresse exclusivement à la dimension d'une grandeur G. A titre d'exemple d'application, on peut déterminer que la dimension de la masse volumique d'un fluide ρ sachant que cette grandeur est définie comme le rapport masse/volume : $[\rho] = M\,L^{-3}$. Les unités SI de ρ sont : $kg\,m^{-3}$.

Similitude entre modèle et prototype

Les échelles permettent d'établir les relations de similitude entre deux systèmes qui dans la pratique sont le prototype et son modèle étudié en laboratoire. L'échelle de la grandeur arbitraire G, est notée $E(G)$ et définie par :

$$E(G) = \frac{G_m}{G_p}$$

Où G_m est la grandeur mesurée au modèle et G_p la grandeur correspondante du prototype.

Pour expliquer l'intérêt de la théorie de similitude dynamique on considère un modèle d'avion relié à son prototype à travers plusieurs échelles dont celles de longueurs $E(L)$, des vitesses $E(V)$ et des puissances $E(\mathcal{P})$. Si le modèle peut décoller à une vitesse V_m grâce à une propulsion de puissance $\mathcal{P}_m$, on peut conclure que l'avion qui sera construit semblable au modèle pourra décoller à une vitesse $V_p=V_m/E(V)$ en déployant une puissance $\mathcal{P}_p=\mathcal{P}_m/E(\mathcal{P})$.

Echelles géométriques

La **similitude géométrique** implique que le modèle doit être une reproduction géométrique exacte, jusqu'aux moindres détails, du prototype qui est le système original. La similitude géométrique est vérifiée si les deux systèmes sont reliés par une échelle des longueurs $E(L)$ unique. Ainsi on a :

Echelle des surfaces A : $E(A) = E(L)^2$

Echelle des volumes $\cancel{V}$: $E(\cancel{V}) = E(L)^3$

Echelle des masses M : $E(M) = E(\rho)\, E(L)^3$

Où $E(\rho)$ est l'échelle des masses volumiques.

PROBLEME 1. *A titre d'exercice vous pouvez calculer la masse d'une sphère massive de $10\ cm$ de diamètre, sachant qu'une autre sphère d'exactement le même matériau mais de $5\ cm$ de diamètre, a une masse de $0.500\ kg$.*

Echelles cinématiques

La similitude cinématique implique que toutes les particules fluides homologues du modèle et du prototype parcourent des trajectoires géométriquement similaires, se retrouvant en des positions homologues en des temps homologues. Cette similitude est vérifiée si les échelles des vitesses et des accélérations sont données par :

Echelle des vitesses V : $E(V) = E(L)\, E(t)^{-1}$

Echelle des accélérations dV/dt : $E(dV/dt) = E(L)\, E(t)^{-2} = E(V)^2\, E(L)^{-1}$

La similitude cinématique introduit la dimension fondamentale temps t, si bien que les conditions de similitude reliant le modèle et le prototype doivent être vérifiées en des temps homologues.

Echelles dynamiques générales

Ces échelles s'appliquent à l'écoulement de tous les fluides qu'ils soient parfaits ou visqueux. Selon le principe fondamental de la dynamique newtonienne, l'échelle des forces doit être égale au produit de l'échelle des masses par celle des accélérations :

$$E(F) = E(M)\, E(dV/dt) = E(\rho)\, E(V)^2\, E(L)^2$$

Cette échelle des forces définie en termes de l'échelle des vitesses, caractérise les forces d'inertie.

Les échelles des énergies et des puissances s'écrivent comme suit :

$$E(E) = E(\rho)\, E(V)^2\, E(L)^2\, E(\Delta l) = E(\rho)\, E(V)^3\, E(L)^2\, E(t)$$

$$E(\mathcal{P}) = E(\rho)\, E(V)^3\, E(L)^2$$

Problème 2. *La puissance nominale d'une éolienne de* $82\ m$ *de diamètre associée à une vitesse de vent de* $12.00\ m\ s^{-1}$ *est de* $2.00\ MW$*. Calculez la puissance pour une éolienne de* $120\ m$ *de diamètre ayant le même rendement sous l'action d'un vent nominal de* $13.50\ m\ s^{-1}$*.*

Dans un grand nombre des problèmes pratiques de mécanique des fluides en interaction avec des corps solides, les forces dues directement à la pression sont fondamentales. Ces forces sont proportionnelles à une différence de pression Δp multipliée par une surface, ce qui permet d'écrire :

$$E(F) = E(\Delta p)\, E(L)^2 = E(\rho)\, E(V)^2\, E(L)^2$$

Si la similitude est parfaite entre un prototype et son modèle, on vérifie une égalité des nombres d'Euler entre le modèle et le prototype, soit :

$$\left.\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}\right|_{modèle} = \left.\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}\right|_{prototype}$$

Le nombre d'Euler caractérise l'importance relative des forces de pression vis-à-vis des forces d'inertie. Le tableau ci-après présente plusieurs formules utilisées par les ingénieurs compatibles avec les lois de similitude associées au nombre d'Euler.

Définition de la force	*Formule utilisé*	*Coefficient hydrodynamique*
Force d'entraînement F_D d'un fluide en écoulement stationnaire sur un corps solide immergé de surface caractéristique A_R	$F_D = C_D\,\rho\,\frac{V_R^{\,2}}{2}\,A_R$	*C_D : coefficient d'entraînement*
Force de portance F_P d'un fluide en écoulement stationnaire sur un corps solide immergé de surface caractéristique A_R	$F_P = C_P\,\rho\,\frac{V_R^{\,2}}{2}\,A_R$	*C_P : coefficient de portance*
Pertes de charge linéiques h_f dues à l'écoulement à travers un tube de diamètre D sur une longueur L	$h_f = \frac{\Delta p}{\rho\,g} = f\,\frac{L}{D}\,\frac{V_R^{\,2}}{2\,g}$	*f : coefficient de frottement de la formule de Darcy-Weisbach*
Contrainte tangentielle τ_p exercée par un écoulement stationnaire sur une paroi solide fixe	$\tau_p = c_f\,\rho\,\frac{V_R^{\,2}}{2}$	*c_f : coefficient de frottement local*

Les valeurs des différents coefficients hydrodynamiques sont associées à la définition retenue pour la vitesse de référence V_R. D'habitude, dans les formules de F_D et F_P, la valeur de V_R correspond à la vitesse V_o du fluide non perturbée par le solide, alors que dans les formules de Darcy-Weisbach et de τ_p, V_R correspond à la vitesse moyenne de l'écoulement V.

On doit noter que tous ces coefficients sont adimensionnels. D'une façon générale, ceux-ci dépendent à la fois des paramètres de similitude géométrique et des lois de similitude relatives à l'écoulement des fluides.

Echelles dynamiques spécifiques

Des lois de similitude relatives à la mécanique des fluides peuvent être obtenues directement à partir des équations régissant les écoulements dont la plus importante pour nous est l'équation de Navier-Stokes.

> Similitude de Reynolds

Dans tous les problèmes où les forces visqueuses sont d'importance, on doit satisfaire une égalité des nombres de Reynolds entre le modèle et le prototype :

$$\left.\frac{V\,L}{\nu}\right|_{\text{modèle}} = \left.\frac{V\,L}{\nu}\right|_{\text{prototype}}$$

Où ν est la viscosité cinématique qui est reliée à la viscosité dynamique μ par $\nu=\mu/\rho$. Le nombre de Reynolds caractérise l'importance relative des forces d'inertie vis-à-vis des forces visqueuses $(\rho L^2 V^2)/(\mu L V)$. Cette condition de similitude concerne en général tous les écoulements des fluides réels.

Tous les coefficients hydrodynamiques du tableau précédent varient en fonction d'un nombre de Reynolds caractéristique du problème :

- La figure 1 montre la variation du coefficient d'entraînement C_D pour un corps solide cylindrique de diamètre D en fonction du nombre de Reynolds V_oD/ν.
- La figure 2 montre la variation du coefficient de frottement f en fonction du nombre de Reynolds VD/ν et de la rugosité relative ε/D qui traduit ici une condition de similitude géométrique (ε est la rugosité absolue des parois du tube en unités de longueur).

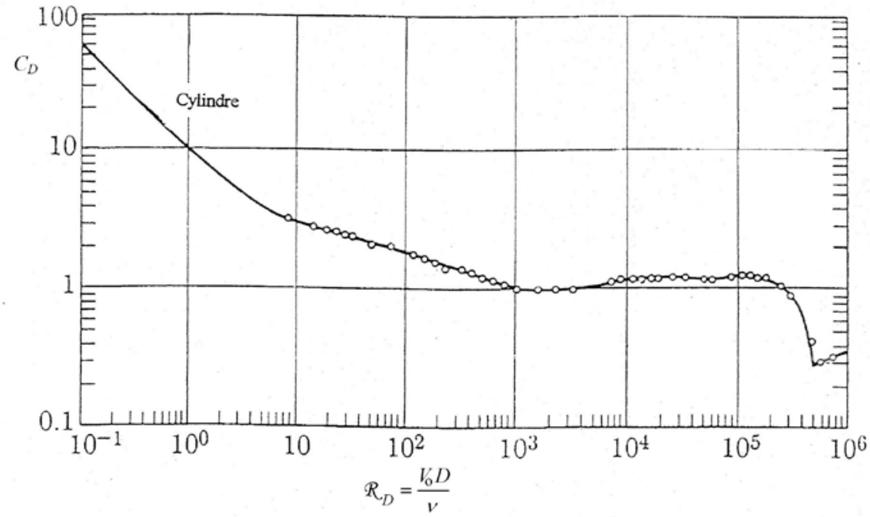

Figure 1. Variation du coefficient d'entraînement C_D en fonction du nombre de Reynolds pour un cylindre exposée perpendiculairement à l'action d'un écoulement.

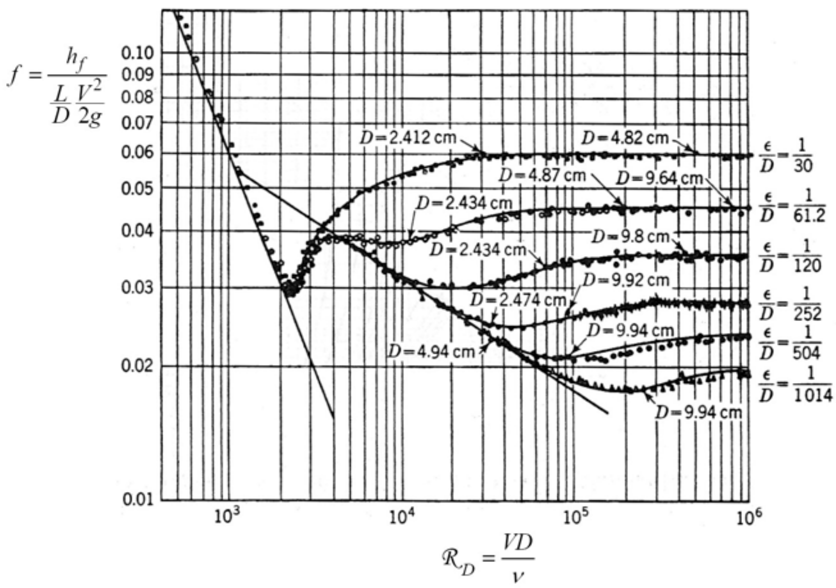

Figure 2. Résultats expérimentaux de Nikuradse reliant le coefficient de frottement f de la formule de Darcy-Weisbach à $\mathcal{R}_D$ et à la rugosité relative ε/D.

Selon la condition de similitude de Reynolds, l'échelle des vitesses $E(V)$ est reliée à l'échelle des viscosités cinématiques E_ν par :

$$E(V) = E(\nu)\, E(L)^{-1}$$

Pour un modèle réduit $E(L)<1$, alors, si le fluide est le même dans le modèle et le prototype $E(\nu)=1$ et on aura $E(V)>1$, ce qui veut dire que pour respecter la similitude des écoulements, les vitesses dans le modèle devront être supérieures à celles du prototype. De fait, la condition de similitude de Reynolds impose une échelle des vitesses qui est souvent difficile à satisfaire dans la pratique.

On constate dans les écoulements à nombre de Reynolds élevé, une indépendance des différents coefficients hydrodynamiques vis-à-vis du nombre de Reynolds, si bien qu'on peut utiliser une échelle des vitesses arbitraire, indépendamment des conditions de similitude de Reynolds. Cette approche est pleinement justifiée si la turbulence est complète aussi bien dans le prototype que dans le modèle, ce qui est le cas dans un grand nombre des problèmes relatifs au génie civil.

> Systèmes à surface libre et modèles de Froude.

Dans tous les problèmes où les forces liées à la gravité sont d'importance, on doit satisfaire une égalité des nombres de Froude entre le modèle et le prototype :

$$\left.\frac{V}{g^{1/2}\,L^{1/2}}\right|_{modèle} = \left.\frac{V}{g^{1/2}\,L^{1/2}}\right|_{prototype}$$

L'échelle des vitesses $E(V)$ est reliée à l'échelle des accélérations de la pesanteur $E(g)$ par :

$$E(V) = E(g)^{1/2}\, E(L)^{1/2}$$

La combinaison de cette relation avec celle donnant l'échelle des forces dans un cas général, permet de montrer une égalité entre les échelles des forces et des poids :

$$E(F) = E(\rho)\, E(V)^2\, E(L)^2 = E(\rho)\, E(g)\, E(L)^3 = E(Poids)$$

Les modèles en accord avec les conditions de similitude de Froude concernent un important nombre de problèmes de génie côtier parmi lesquels on peut citer : la propagation de la houle ; l'agitation portuaire ; la réflexion de la houle par une paroi ; la stabilité des brise-lames sous l'action des vagues ; l'affouillement autour des piles des ponts sous l'action des courants.

Après avoir étudié les sections précédentes, vous devez effectuer en individuel, le test d'auto-évaluation des connaissances relatives à l'analyse dimensionnelle proposé en ligne sur votre espace ***Madoc** ou **Extradoc***.

Applications de la similitude dynamique aux problèmes de génie côtier

Dans tous les problèmes qui suivent, on prend en considération la condition de similitude de Froude et on néglige celle de Reynolds. Comme indiqué préalablement, cette démarche est justifiée si l'écoulement est turbulent aussi bien dans le modèle que dans le prototype, avec dans les deux cas des nombres de Reynolds élevés.

PROBLEME 3.

La mise en mouvement sous l'action d'un courant, d'un lit de graviers arrondis de diamètre uniforme $D=0.005$ m, est étudiée en canal en laboratoire. Un entraînement généralisé des graviers par charriage est observé pour une vitesse critique du courant $V_c=0.85$ m s^{-1} et une profondeur de l'écoulement $d=0.20$ m.

Déterminez la vitesse du courant nécessaire pour mettre en mouvement dans un prototype, un lit de graviers de même forme de $D=0.020$ m, si la profondeur de l'écoulement est $d=0.80$ m. On considère que les masses volumiques des fluides et des solides sont les mêmes en laboratoire et dans le prototype.

Remarque : *Selon la théorie de Shields appliquée à la mise en mouvement de sédiments naturels, la condition de similitude de Reynolds ne peut pas être négligée pour des diamètres inférieurs à 0.005 m. Pour les diamètres supérieurs à 0.005 m le coefficient de Shields est constant et donc indépendant du nombre de Reynolds. Ce coefficient caractérise les forces tractrices par rapport aux forces résistantes.*

PROBLEME 4.

On reprend le problème 3 ci-dessus, avec les modifications suivantes :

Masse volumique de l'eau en laboratoire : $\rho_m = 1000$ kg m^{-3}.

Masse volumique de l'eau dans le prototype : $\rho_p = 1025$ kg m^{-3}.

Masse volumique des graviers en laboratoire : $\rho_{sm} = 2600$ kg m^{-3}.

Masse volumique des graviers dans le prototype : $\rho_{sp} = 2400$ kg m^{-3}.

Pour déterminer la vitesse du courant nécessaire pour mettre en mouvement les graviers dans le prototype, on doit dans ce cas tenir compte que l'unicité d'échelles des masses volumiques n'est pas respectée. Ainsi, dans ce problème, l'échelle des vitesses critiques d'érosion doit être établie à partir du nombre de Froude densimétrique $\mathcal{F}_{\rho'}$. *Ce nombre s'écrit comme suit :*

$$\mathcal{F}_{\rho'} = \frac{V}{(g\,\rho'\,L)^{1/2}} \qquad \text{, avec :} \qquad \rho' = \frac{\rho_s - \rho}{\rho}$$

Le nombre $\mathcal{F}_{\rho'}$ *caractérise dans les problèmes de mise en mouvement de solides, la racine carrée du rapport de la force tractrice sur la force résistante.*

Pour répondre à cette question, vous devez d'abord établir l'échelle des vitesses V_c, *ensuite, calculer cette échelle en fonction de celles de* g, ρ' *et* L, *et finalement, calculer la vitesse critique de mise en mouvement dans le prototype par l'usage de l'échelle des vitesses :* $E(V_c)=V_{cm}/V_{cp}$.

Remarque : *On doit noter que pour l'étude de l'écoulement lui-même, sans s'intéresser au mouvement des solides déposés, on doit toujours utiliser le nombre de Froude classique.*

PROBLEME 5.

Une tension maximale de $5\ N$ *est mesurée sur les lignes d'amarrage d'une plaque flottante (figure 3) dans un modèle réduit construit à l'échelle* $1/20$. *La hauteur de la houle générée en laboratoire est de* $5\ cm$ *et sa période est de* $1.5\ s$. *Le fluide est le même dans le modèle et le prototype. Déterminez la hauteur de la houle, la période de la houle et la tension maximale des lignes d'amarrage du prototype.*

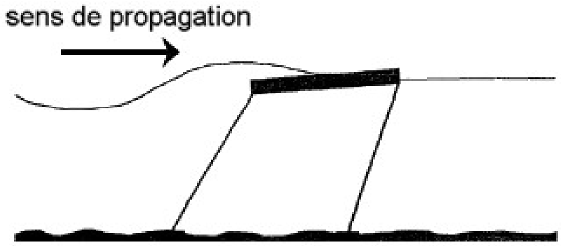

Figure 3. Illustration de l'action d'une houle sur une plaque flottante.

PROBLEME 6.

Une maquette de digue constituée par un empilement de blocs de béton de $1.2\ kg$ *chacun, est soumise à la houle produite dans un canal en laboratoire. Cette maquette ne subit pas de dommages tant que la hauteur* H *de la houle ne dépasse pas* $0.30\ m$. *Les fluides du modèle et du prototype sont les mêmes.*

Quelle devra être la masse minimale des blocs de même béton constituant la digue prototype pour que celle-ci résiste à une houle géométriquement et hydrauliquement semblable, pouvant atteindre $6\ m$ *de hauteur ? Pour répondre à cette question vous devez suivre la méthodologie ci-après.*

a) Établissez à partir du nombre de Froude, l'échelle des vitesses et l'échelle des forces hydrodynamiques en fonction des échelles des masses volumiques et des longueurs.

b) Calculez les échelles des longueurs (selon l'énoncé du problème), des forces et des masses, puis, la masse minimale des blocs de la digue prototype.

Une formule très utilisée pour calculer la masse M *des éléments de la carapace extérieure d'un brise-lames est celle de Hudson. Cette formule s'écrit comme suit:*

$$M = \frac{\rho_s H^3}{K\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right)^3 \cot(\alpha)}$$

où: ρ_s *est la masse volumique des éléments de carapace,* ρ *la masse volumique de l'eau,* α *l'angle du talus du brise-lames avec l'horizontale et* K *un coefficient de stabilité dépendant principalement de la forme et de la rugosité des éléments.*

c) Montrez que le coefficient K *est adimensionnel.*

d) Calculez le coefficient K *de la formule de Hudson pour ces éléments de carapace (prendre:* ρ_s=2400 kg m^{-3}, ρ=1000 kg m^{-3} *et* α=30°*).*

e) Recalculez la masse des éléments de carapace du prototype en utilisant la formule de Hudson.

Montrez que la formule de Hudson peut être justifiée grâce à la théorie de similitude dynamique. On doit considérer un cas général avec les masses volumiques du modèle et du prototype ayant des valeurs différentes.

On doit considérer :

- *Une échelle des masses des blocs donnée par* $E(M) = E(\rho_s L^3)$.
- *Une échelle des forces unique :* $E(F) = E(\rho V^2 L^2)$.
- *Une échelle des vitesses hydrodynamiques liée à* H : $E_1(V) = E(g H)^{1/2}$.
- *Une deuxième échelle des vitesses issue du nombre* $\mathcal{F}_{\rho'}$: $E_2(V) = E(g \rho' L)^{1/2}$

Pour conclure cette séance, complétez sur votre espace ***Madoc ou Extradoc,*** le questionnaire demandé à l'issue de la séance A-1, relatif aux problèmes ici étudiés.

NOTES PERSONNELLES :